Testiranje statističkih hipoteza

U ovoj lekciji ćemo objasniti šta je statistička hipoteza i pokazati kako se može koristiti uzorak podataka za njeno testiranje. Napravićemo razliku između nulte hipoteze i alternativne hipoteze. Objasnićemo značaj odbacivanja nulte hipoteze i ne odbacivanja te hipoteze. Predstavićemo koncept p vrijednosti koja se dobije kao rezultat testa.

Testiranje hipoteza i nivoi značajnosti

Statistička hipoteza je tvrdnja o prirodi populacije. Često je napisana u obliku parametara populacije.

Da bi testirali statističku hipotezu, moramo odrediti da li je hipoteza saglasna sa podacima iz uzorka.

1. Neka fabrika duhana tvrdi da je otkrila novi tretman obrade listova duhana, koji kao rezultat u prosjeku proizvodi cigarete koje sadrže manje od 1,5 miligrama nikotina po cigareti, ili tačno 1,5 miligrama nikotina. Pretpostavimo da je istraživač koji treba ovo ispitati i potvrditi, skeptičan (sumnjičav) prema ovoj tvrdnji i zaista vjeruje da će sredina (prosjek) uzorka prevazići 1,5 miligram. Da bi opovrgao ovu tvrdnju fabrike duhana, istraživač je odlučio da testira hipotezu da je sredina manja ili jednaka 1,5 miligrama. Odrediti nultu i alternativnu hipotezu ovog eksperimenta, te ih prikazati simbolično pomoću parametara.

Nulta hipoteza, koju označavamo sa H_0, je tvrdnja o parametrima populacije. *Alternativnu hipotezu* označavamo sa H_1. Nulta hipoteza će biti odbačena ako se pojavi nesaglasnost sa uzorkom podataka, a u suprotnom neće biti odbačena.

2. Posmatrajmo problem iz Zadatka broj 1. Riječima objasniti kakva bi dalja procedura bila nakon što znamo alternativnu i nultu hiptezu. Objsaniti u kojem slučaju bi nulta hipoteza bila odbačena, a u kojem slučaju nulta hipoteza ne bi bila odbačena (sve skroz ukratko, bez ikakvog računa).

Odluka da li ćemo li ne odbaciti nultu hipotezu je bazirana na vrijednosti iz test-statistike.

Test-statistika je statistika čije vrijednosti su određene iz uzorka podataka. U zavisnosti od vrijednosti ove test statistike, nulta hipoteza će biti odbačena ili ne.

3. Objsniti šta je test-statistika iz Zadatak broj 1. U kojem slučaju bi tada nulta hipoteza bila odbačena (sve skroz ukratko, bez ikakvog računa).

U opštem slučaju, ako sa TS označimo test-statistiku, da bi završili naše specifikacije za test, moramo odrediti skup vrijednosti za TS na osnovu kojih bi nultu hipotezu obacili.

Kritična oblast, također poznata kao i *oblast odbacivanja*, je skup vrijednosti iz test-statistike za koje je nulta hipoteza odačena.

4. Statistički test nulte hipoteze H_0 je podpuno određen kada su određeni test-statistika i kritični region. Ako sa TS označimo test-statistiku a sa K označimo kritični region, tada statistički test nulte hipoteze H_0 je sljedeći:

Odbaci H_0 ako je TS u K

Nemoj odbaci H_0 ako TS nije u K

Primjeniti ovo objašnjenje za Zadatak broj 1, pod pretpostavkom da je standardna devijacija nikotina u cigareti 0,8 miligrama, a n veličina uzorka.

Ako je veličina uzorka $n = 36$ za koju vrijednost će nulta hipoteza biti odbačena a za koju ne.

Da li će nulta hipoteza biti odbačena za vrijednost sredine uzorka 1,7? Šta za slučaj 1,9?

Odbacivanje nulte hipoteze H_0 je jaka tvrdnja da H_0 nije u saglasnosti sa posmatranim podacima. Rezultat da H_0 nije odbačen je slaba tvrdnja koja se treba tumačiti kao da je H_0 saglasan sa podacima.

Klasična procedura za testiranje nulte hipoteze je da fiksiramo dovoljno mali nivo značajnosti α i onda zahtjevamo da je vjerovatnoća odbacivanja H_0, kada je H_0 tačan, manja ili jednaka od α.

Ako nam je cilj da ustanovimo tačnost određene hipoteze, tada ta hipoteza bi trebala biti dizajnirana kao alternativna hipoteza. Slično, ako nam je cilj da hipoteza izgubi svoj ugled (da bude na zlom glasu) tada hipoteza treba da je dizajnirana kao nulta hipoteza.

5. Posmatrajmo problem iz Zadatka broj 1. Ako fabrika duhana želi da sprovede eksperiment u kome će dokazati da je sredina nivoa sadržaja nikotina u njezinim cigaretama manja od 1,5 šta će fabrika tada uzti kao nultu hipotezu a šta za alternativnu hipotezu? Zašto?

6. Posmatrajmo suđenje u kome porota mora odlučiti između hipoteze A da je osumnječeni kriv i hipoteze B da je on ili ona nevin.

(a) U okviru testiranja hipoteza i BiH zakonskog sistema, koja od hipoteza bi trebala da bude nulta hipoteza?

(b) Šta mislite šta bi bila odgovarajuća kritična oblast u ovoj situaciji?

Rješenje-upute: (a) Hipoteza B. □

7. Pretpostavimo da test

$$H_0 : \mu = 0 \quad \text{protiv} \quad H_1 : \mu \neq 0$$

kao rezultat ima odbacivanje hipoteze H_0 na 5 postotnom nivou značajnosti. Koje od sljedećih tvrdnji je (su) tačna(e)?

(a) Podaci pokazuju da je μ dovoljno različito od 0, što znači da je dovoljno daleko od 0.

(b) Podaci su dovoljno jaki da zaključimo da μ nije jednako 0.

(c) Vjerovatnoća da je μ jednako 0 je manja od 0,05.

(d) Hipoteza da je μ jednako 0 je odbačeno procedurom koja je kao rezultat imala odbacivanje samo 5 postotaka vremena kada je μ jednako 0.

Rješenje-upute: (d) je najviše tačno; (b) je više tačno nego što nije. □

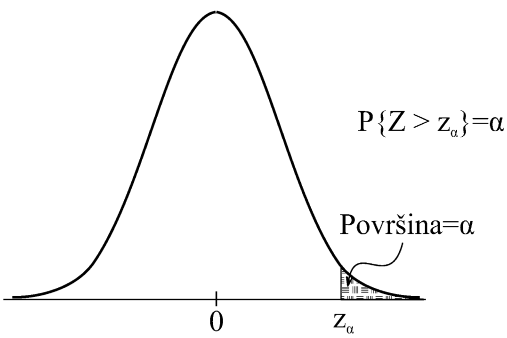
Testovi koji se odnose na sredinu populacije koja ima normalnu raspodjelu: slučaj kada je varijansa poznata (Z test)

8. Za bilo koju vrijednost α između 0 i 1, definišemo z_α kao vrijednost za koju vrijedi da je

$$P\{Z > z_\alpha\} = \alpha$$

Drugim riječima, vjerovatnoća da standardna normalna slučajna varijabla koja je veća od z_α da bude jednaka α (vidi sliku desno) (z_α nazivamo $100(1-\alpha)$ postotak standardne normalne distribucije).

Koristeći tabelu Standardne normalne vjerovatnoće izračunati $z_{0.025}$, $z_{0.05}$, $z_{0.10}$, $z_{0.005}$, $z_{0.01}$ i $z_{0.25}$.



Pretpostavimo da je $X_1, X_2, ..., X_n$ uzorak iz normalne distribucije koja ima nepoznatu sredinu μ i poznatu varijansu σ^2, i pretpostavimo da želimo testirati nultu hipotezu da je sredina μ jednaka nekoj određenoj vrijednosti nasuprot alternativnoj koja nije. To jest, želimo testirati

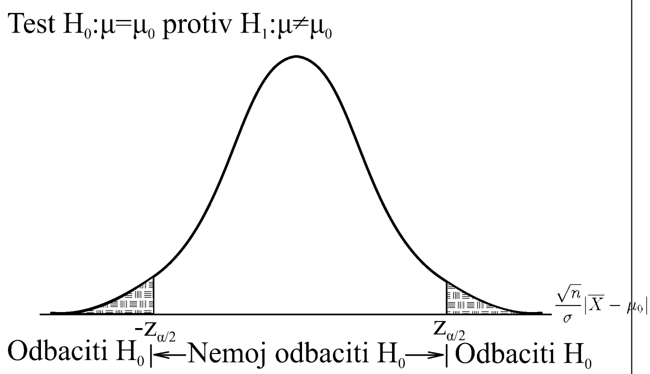
$$H_0 : \mu = \mu_0$$

nasuprot alternativnoj hipotezi

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

za određenu vrijednost μ_0.

Ako je $\overline{X}$ sredina uzorka $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$, z_α označava $100(1-\alpha)$ postotak standardne normalne distribucije i σ^2 varijansa tada nivo-α-značajnosti nulte hipoteze da je sredina populacije jednaka određenoj vrijednosti μ_0 nasuprot alternativi da nije jednaka μ_0 je da odbacimo nultu hipotezu ako



$$|\overline{X} - \mu_0| \geq z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ili ekvivalentno sa

$$\begin{array}{ll} \text{Odbaci } H_0 & \text{ako je } \frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{X} - \mu_0| \geq z_{\alpha/2} \\ \text{Nemoj odbaciti } H_0 & \text{u suprotnom} \end{array}$$

9. Pretpostavimo da, ako je emitovan signal intenziteta μ sa određene zvijezde, da vrijednost koja je primljena na poziciji opažanja na zemlji je normalna slučajna varijabla sa sredinom μ i standardnom devijacijom 4. Drugim riječima, vrijednost emitovanog signala je promjenjena pomoću *slučajnog šuma*, koji ima normalnu distribuciju sa sredinom 0 i standardnom devijacijom 4. Pretpostavljeno je, da je intenzitet signala jednak 10. Testirati da li je hipoteza vjerodostojna ako je isti signal nezavisno primljen 20 puta i od 20 dobijenih vrijednosti dobijeni prosjek je 11,6. Koristiti 5 postotni nivo značajnosti.

Vrijednost p je najmanja moguća vrijednost nivoa značaja na osnovu koje podaci vode ka odbacivanju nulte hipoteze. Ona daje vjerovatnoću da podaci ne podržavaju H_0.....

10. Uređaj koji astronomi koriste za mjerenje udaljenosti kao rezultat ima mjeru koja ima srednju vrijednost jednaku stvarnoj udaljenosti objekta koji je mjeren i standardnu devijaciju od 0,5 svjetlosnih godina. Trenutna teorija nam govori da stvarna udaljenost između Zemlji i asteroida Phyla iznosi 14,4 svjetlosne godine. Testirati ovu hipotezu, na 5 postoni nivo značaja, ako šest nezavisnih mjera povlači sljedeće podatke

$$15,1; \quad 14,8; \quad 14,0; \quad 15,2; \quad 14,7; \quad 14,5;$$

(odgovarajuća distribucija je normalna).

Rješenje-upute: $H_0 : \mu = 14,4$; $H_1 : \mu \neq 14,4$; $z_{0,025} = 1,96$; $\sigma = 0,5$ (iz postavke); $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{X} - \mu_0| = 1,5513$; Sad imamo

$$\begin{array}{ll} \text{Odbaci } H_0 & \text{ako je } 1,5513 \geq 1,96 \\ \text{Nemoj odbaciti } H_0 & \text{u suprotnom} \end{array}$$

Nemoj odbaciti H_0. $\square$

11. Posmatrajmo eksperiment iz Zadatka broj 9 i pretpostavimo da je prosjek od 20 vrijednosti jednak 10,8. Odrediti p vrijednost i objasniti za koje nivoe značajnosti H_0 neće biti odbačena. Isto ovo sprovesti za slučaj kada je sredina uzorka 7,8.

12. Da bi testirali hipotezu

$$H_0 : \mu = 1,5 \quad \text{protiv} \quad H_1 : \mu \neq 105$$

uzet je uzorak veličine 9. Ako je sredina uzorka $\overline{X} = 100$, pronaći p vrijednost ako je poznata standardna devijacija populacije
(a) $\sigma = 5$
(b) $\sigma = 10$
(c) $\sigma = 15$
U kojem slučaju će nulta hipoteza biti odbačena sa 5 postotnim nivoom značajnosti? Šta je sa slučajem za 1 postotni nivo?

Rješenje-upute: $H_0 : \mu = 105; \quad H_1 : \mu \neq 105;$
(a) $\sigma = 5; \quad \frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{X} - \mu_0| = 3;$
Sad imamo $P\{|Z| \geq 3\} = 2P\{Z \geq 3\} = 2(1 - P\{Z < 3\}) = 0,0026$
(b) $p = 0,1336$
(c) $p = 0,3174$
Na 5% nivou značajnosti odbacićemo H_0 u slučaju (a). Za 1% nivo značajnosti odbacićemo H_0 u slučaju (a). $\square$

Sljedeći primjer je skoncentrisan na određivanje vjerovatnoće za ne odbacivanje nulte hipoteze kada je ona netačna.

13. Posmatrajmo eksperiment iz Zadatka broj 9. Ako pretpostavimo da je nivo značajnosti 0,05, kolika je vjerovatnoća da će nulta hipoteza (da je intenzitet signala jednak 10) biti odbačena kada je stvarna vrijednost signala 9,2?

14. Poznato je da vrijednost koju prima lokalna prijemna stanica jednaka vrijednosti koju šalje plus slučajna greška koja je normalna sa sredinom 0 i standardnom devijacijom 2. Ako je ista vrijednost poslana 7 puta, izračunati vjerovatnoću da li će nulta hipoteza, da je vrijednost 14 poslana, biti odbačena, na 5 postotnom nivou značajnosti, kada je stvarna vrijednost koja je poslana
(a) 15
(b) 13
(c) 16
ako su primljene vrijednosti

$$14,6; \quad 14,8; \quad 15,1; \quad 13,2; \quad 12,4; \quad 16,8; \quad 16,3;$$

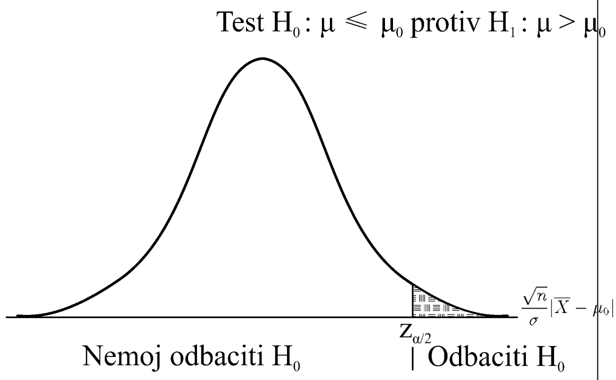
Rješenje-upute: (a) 0.2616 (b) 0.2616 (c) 0.7549 $\square$

U mnogim situacijama, zanima nas testiranje hipoteza da li je sredina manja ili jednaka od neke određene vrijednosti μ_0 nasuprot alternativi da je veća od te vrijednosti. To jest, često nas zanima testiranje

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

nasuprot alternativnoj hipotezi

$$H_1 : \mu > \mu_0.$$



S obzirom da želimo odbaciti H_0 samo kada je sredina uzorka $\overline{X}$ mnogo veće od μ_0 (i ne više kada je mnogo manje), tada test α-niva-značajnosti je da

$$\begin{array}{ll} \text{Odbaci } H_0 & \text{ako je } \dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \mu_0) \geq z_{\alpha/2} \\ \text{Nemoj odbaciti } H_0 & \text{u suprotnom} \end{array}$$

(vidi sliku)

15. Sve sadašnje cigarete koje se prodaju sadrže u prosjeku najmanje 1,5 miligrama nikotina. Jedna fabrika duhana koja proizvodi cigarete tvrdi da je otkrila novi metod obrade listova duhana i da kao rezultat u prosjeku proizvodi cigarete koje sadrže manje od 1,5 miligrama nikotina po cigareti. Da bi testirala ovu tvrdnju, uzeto je 20 cigareta za testiranje iz ove fabrike. Ako je poznato da je standardna devijacija nikotina po cigareti 0,7 miligrama, kakve zaključke možete izvesti, na 5 postotnom nivou značajnosti, ako je prosječan sadržaj nikotina u ovih 20 cigareta 1,42 miligrama?

Testovi statističkih hipoteza koje sadrže ili nultu ili alternativnu hipotezu u obliku nejednakosti koja je veća (ili manja) od određene vrijednosti se nazivaju *jedno-strani testovi*.

Tabela 1 - Testiranje hipoteza koje se odnose na sredinu μ normalne populacije ako je poznata varijansa σ^2 ($X_1, ..., X_n$ je uzorak podataka, a $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}}{n}$).

H_0	H_1	Test statistika TS	Test α-nivoa-značajnosti	p vrijednost ako je $TS = v$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}$	Odbaci H_0 ako je $\lvert TS \rvert \geq z_{\alpha/2}$ U suprotnom nemoj odbaci H_0	$2P\{Z \geq \lvert v \rvert\}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu \not> \mu_0$	$\sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}$	Odbaci H_0 ako je $TS \geq z_{\alpha/2}$ U suprotnom nemoj odbaci H_0	$2P\{Z \geq v\}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu \not< \mu_0$	$\sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}$	Odbaci H_0 ako je $\lvert TS \rvert \leq -z_{\alpha/2}$ U suprotnom nemoj odbaci H_0	$2P\{Z \leq v\}$

Table 6.1 Standard Normal Probabilities

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Data value in table is $P\{Z < x\}$.

Testiranje statističkih hipoteza

Sva potrebna teorija je iskucana na prethodnim stranicama.

Uvod

Pogledati iskucani tekst

Testiranje hipoteza i nivoi značajnosti

Pogledati iskucani tekst. Ključni pojmovi su
Statistička hipoteza, nulta hipoteza, alternativna hipoteza,
test-statistika, kritična oblast, nivo značajnosti

(#) Neka fabrika duhana tvrdi da je otkrila novi tretman obrade listova duhana, koji kao rezultat u prosjeku proizvodi cigarete koje sadrže manje od 1,5 miligrama nikotina po cigareti, ili tačno 1,5 miligrama nikotina. Pretpostavimo da je istraživač koji treba ovo ispitati i potvrditi skeptičan (sumnjičav) prema ovoj tvrdnji i on vjeruje da će sredina (prosjek) uzorka prevazići 1,5 miligram. Da bi opovrgao ovu tvrdnju fabrike duhana, istraživač je odlučio da testira hipotezu da je sredina manja ili jednaka 1,5 miligrama. Odrediti nultu i alternativnu hipotezu ovog eksperimenta, te ih prikazati simbolično pomoću parametara.

R:

Statistička hipoteza koju trebamo testirati, se naziva nulta hipoteza i označava sa H_0, i u ovom slučaju ona je pretpostavka da je sadržaj sredine nikotina po cigareti manja ili jednaka od 1,5 miligrama. Simbolično, ako sa μ označimo sadržaj sredine nikotina po cigareti, tada nultu hipotezu možemo označiti sa

$$H_0: \mu \leq 1,5$$

Alternativa nultoj hipotezi, koju osoba koja vrši testiranje u stvari želi da postigne, se naziva alternativna hipoteza i označava sa H_1. Za naš primjer, H_1 je hipoteza da sadržaj sredine nikotina prevazilazi 1,5 miligrama, što se simbolično može pisati kao

$$H_1: \mu > 1,5$$

#. Posmatrajmo problem iz prvog zadatka. Riječima objasniti kakva bi dalja procedura bila nakon što znamo alternativnu i nultu hipotezu. Objasniti u kojem bi slučaju nulta hipoteza bila odbačena, a u kojem slučaju nulta hipoteza ne bi bila odbačena (sve skroz ukratko, bez ikakvog računa).

Rj:

Da bi testirali nultu hipotezu da je sadržaj srednje nikotina po cigareti manji ili jednak od 1,5 miligrama, na slučajan način bi izabrali cigarete koje su obrađene novim tretmanom obrade listova duhana i izmjerili bi njihov sadržaj nikotina.

Ako rezultati uzorka podataka nisu "saglasni" sa nultom hipotezom, tada kažemo da je nulta hipoteza odbačena; a ako su "saglasni" sa nultom hipotezom tada nulta hipoteza nije odbačena.

(#) Objasniti što je test-statistika iz prvog zadatka. U kojem slučaju bi tada nulta hipoteza bila odbačena (skroz ukratko, bez ikakvog računa).

Rj.:

U primjeru za cigarete, test-statistika je prosječan sadržaj nikotina na uzorku cigareta. Statistički test bi tada odbacio nultu hipotezu kada bi ovaj statistički test bio dovoljno veći od 1,5.

(#) Statistički test nulte hipoteze H_0 je podpuno određen kada su određeni test-statistika i kritični region. Ako sa TS označimo test-statistiku a sa K označimo kritični region, tada statistički test nulte hipoteze H_0 je sljedeći

Odbaci H_0 ako je TS u K
Nemoj odbaciti H_0 ako TS nije u K

Primjeniti ovo objašnjenje za zadatak broj 1, pod pretpostavkom da je standardna devijacija nikotina u cigareti 0,8 miligrama, a n veličina uzorka.
Ako je veličina uzorka n=36 za koju vrijednost će nulta hipoteza biti odbačena a za koju ne. Da li će nulta hipoteza biti odbačena za vrijednost sredine uzorka 1,7? Šta je za slučaj 1,9.

Rj.
Za nikotin primjer koji smo do sada posmatrali, ako je poznato da je standardna devijacija sadržaja nikotina po cigareti 0,8 miligrama, tada jedna mogućnost za testiranje nulte hipoteze je da iskoristimo test statistiku $\overline{X}$ koja je jednaka sredini nivoa uzorka nikotina, zajedno sa kritičnim regionom

$$C=\left\{\overline{X} \geq 1,5+\frac{1,312}{\sqrt{n}}\right\}$$

To jest, nulta hipoteza će biti

Odbačena ako $\overline{X} \geq 1,5+\frac{1,312}{\sqrt{n}}$
Neće biti odbačena u suprotnom

gdje je n veličina uzorka (razmatranje koje će nalaziti iza kritičnog regiona će biti upoznato u sljedećem dijelu lekcije).

Na primjer, ako za test iznad primjenimo uzorak veličine 36, tada će nulta hipoteza, da je sredina populacije manja ili jednaka 1,5, biti odbačena ako $\overline{X} \geq 1,719$ a neće biti odbačena ako je $\overline{X} < 1,719$. Važno je da primjetimo da čak i kada je procjena μ-naime, vrijednost sredine uzorka $\overline{X}$, prevazišla vrijednost od 1,5, nulta hipoteza ne mora biti odbačena. Zaista, kada je $n=36$, vrijednost sredine uzorka od 1,7 neće kao rezultat imati odbacivanje nulte hipoteze. Ovo je tačno čak iako tako velika vrijednost sredine uzorka ne ide u prilog za podršku nulte hipoteze. Bezobzira, ona je saglasna sa nultom hipotezom da ako je sredina populacije 1,5, da tada postoji razumna vjerovatnoća da će prosjek uzorka veličine 36 biti velik kao 1,7. Sa druge strane, vrijednost sredine uzorka od 1,9 je malo vjerovatna, ako je sredina populacije manja ili jednaka 1,5 što će voditi ka odbacivanju ove hipoteze.

(#) Posmatrajmo problem iz prvog zadatka. Ako fabrika duhana želi da sprovede eksperiment u kome će dokazati da je sredina nivoa sadržaja nikotina u njezinim cigaretama manja od 1,5 šta će fabrika tada uzeti kao nultu hipotezu a šta za alternativnu hipotezu? Zašto?

Rj.:

Ako fabrika duhana sprovodi eksperiment u kojem želi da pokaže da je sredina nivoa nikotina u cigaretama manja od 1,5, tada će za nultu hipotezu uzeti

$$H_0: \mu \geq 1{,}5$$

a za alternativnu hipotezu

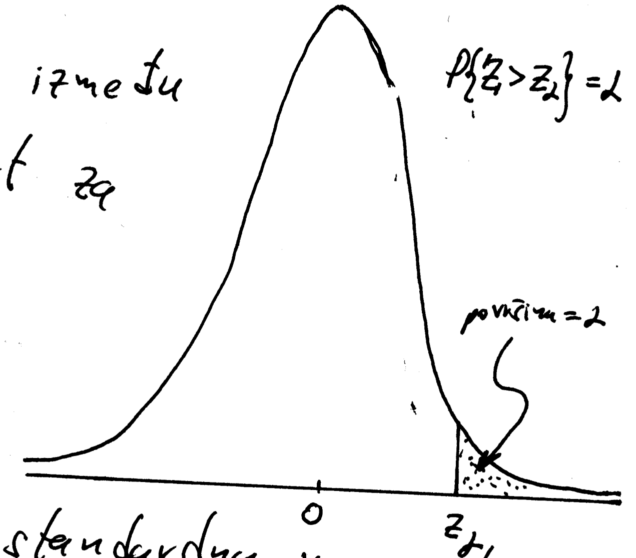
$$H_1: \mu < 1{,}5$$

Tada ova kompanija može iskoristiti odbacivanje nulte hipoteze kao "dokaz" svoje tvrdnje da je sredina sadržaja nikotina manja od 1,5 miligrama.

Testovi koji se odnose na sredinu populacije koja ima normalnu raspodjelu: slučaj kada je varijansa poznata (Z test)

Dio teorije pogledati na iskucanom papiru.

Za bilo koju vrijednost α između 0 i 1, definišemo z_α kao vrijednost za koju vrijedi da je



$$P\{Z > z_\alpha\} = \alpha .$$

Drugim riječima, vjerovatnoća da standardna normalna slučajna varijabla koja je veća od z_α da bude jednaka α (vidi sliku iznad) (z_α nazivamo $100(1-\alpha)$ postotak standardne normalne distribucije).

Koristeći tabelu Standardne normalne vjerovatnoće izračunati $z_{0,025}$, $z_{0,05}$, $z_{0,10}$, $z_{0,005}$, $z_{0,01}$ i $z_{0,25}$.

Rj:

$z_{0,025}$

$$P\{Z < z_\alpha\} = 1 - P\{Z > z_{0,025}\} = 0,975 \overset{\text{iz Tabele}}{\Longrightarrow} z_{0,025} = 1,96$$

$z_{0,05}$

$$P\{Z < z_\alpha\} = 1 - P\{Z > z_{0,05}\} = 0,95$$

$$\left.\begin{array}{l} P\{Z < 1,64\} = 0,9495 \\ P\{Z < 1,65\} = 0,9505 \end{array}\right\} \Rightarrow z_{0,05} = 1,645$$

$$\boxed{\frac{0,9495 + 0,9505}{2} = 0,95}$$

$$z_{0,10} \Rightarrow P(Z < z_\alpha) = 0,9 \qquad \left.\begin{array}{l} P\{Z < 1,28\} = 0,8997 \\ P\{Z < 1,29\} = 0,9015 \end{array}\right\} \xrightarrow{0,9015 - 0,8997 = 0,0018} z_{0,10} = 1,282$$

$$z_{0,005} \Rightarrow P\{Z < z_\alpha) = 0,995 \Rightarrow z_\alpha = 2,576$$

$$z_{0,01} = 2,326, \qquad z_{0,25} = 0,6744$$

(#) Pretpostavimo da, ako je emitovan signal intenziteta μ sa određene zvijezde, da vrijednost koja je primljena na poziciji opažanja na zemlji je normalna slučajna varijabla sa sredinom μ i standardnom devijacijom 4. Drugim riječima, vrijednost emitovanog signala je promjenjena pomoću slučajnog šuma, koji ima normalnu distribuciju sa sredinom 0 i standardnom devijacijom 4. Pretpostavljeno je, da je intenzitet signala jednak 10. Testirati da li je hipoteza vjerodostojna ako je isti signal nezavisno primljen 20 puta i od 20 dobijenih vrijednosti dobijeni prosjek je 11,6. Koristiti 5 postotni nivo značajnosti.

Rj: Ako μ predstavlja stvarnu vrijednost emitovanog signala, tada nulta hipoteza koju želimo testirati je

$$H_0: \mu = 10$$

nasuprot alternative

$$H_1: \mu \neq 10$$

Pretpostavimo da želimo testirati ovo na nivou značajnosti 0,05.

$$z_{\alpha/2} = z_{0{,}025}, \quad P\{Z < z_\alpha\} = 1 - P\{Z > z_{0{,}025}\} = 0{,}975 \overset{\text{iz Tabele}}{\Longrightarrow}$$

$z_{0,025} = 1,96$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left|\bar{X}-\mu_0\right| = \frac{\sqrt{20}}{4}\left|11,6-10\right| = 1,79$$

Kako je ova vrijednost manja od $z_{0,025}=1,96$, nulta hipoteza nije odbačena. Drugim riječima, možemo zaključiti da podaci nisu nesaglasni sa nultom hipotezom da je vrijednost signala jednak 10. Razlog za ovo je taj da je sredina uzorka udaljena od vrijednosti 10 kao što bi se opažano moglo pojaviti, kada je H_0 tačno, nad 5 postotaka vremena. Bez obzira na ovo, primjetimo da, ako je nivo značajnosti izabrano da bude $\alpha=0,1$, nasuprot našem $\alpha=0,05$, tada će nulta hipoteza biti odbačena (zato što je $z_{\alpha/2}=z_{0,05}=1,645$).

(#) Posmatrajmo prethodni zadatak i pretpostavimo da je prosjek od 20 vrijednosti jednak 10,8. Odrediti p vrijednost i objasniti za koje nivoe značajnosti H_0 neće biti odbačena. Isto ovo sprovesti za slučaj kada je sredina uzorka 7,8.

Rj. Pretpostavimo da je prosjek od 20 vrijednosti iz prethodnog zadatka 10,8. U ovom slučaju apsolutna vrijednost test statistike je

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{X}-\mu_0| = \frac{\sqrt{20}}{4}|10,8-10| = 0,894$$

Kako je

$$P\{|Z| \geq 0,894\} = 2P\{Z \geq 0,894\} =$$

$$= 2(1-P\{Z < 0,894\}) = 2(1-0,8143) = 2\cdot 0,1857 = 0,371$$

(iz date Tabele)

slijedi da je p vrijednost $p=0,371$. Prema tome, nulta hipoteza da je vrijednost signala 10 neće biti odbačena na bilo kojem značajnom nivou manjem od 0,371. S obzirom da nikad nećemo željeti da koristimo nivo značajnosti koji će biti veći od ove vrijednosti, H_0 neće biti odbačeno.

S druge strane, ako je vrijednost sredine uzorka 7,8 tada apsolutna vrijednost test statistike će biti

$$\frac{\sqrt{20}}{4}(2,2) = 2,46$$

pa će p vrijednost iznositi

$$p \text{ vrijednost} = P\{|Z| \geq 2,46\}$$

$$= 2P\{Z \geq 2,46\} = 2(1 - \underbrace{P\{Z < 2,46\}}_{=0,9931})$$

$$= 2 \cdot 0,0069 =$$

$$= 0,014$$

Time, H_0 će biti odbačena na svim nivoima značajnosti iznad 0,014 i neće biti odbačena za niže nivoe značajnosti.

(#) Posmatrajmo isti eksperiment kao u prethodnom zadatku (da je emitovan signal intenziteta μ sa određene zvijezde). Ako pretpostavimo da je nivo značajnosti 0,05, kolika je vjerovatnoća da će nulta hipoteza (da je intenzitet signala jednak 10) biti odbačena kada je stvarna vrijednost signala 9,2?

Rj. Iz postavke zadatka $\sigma=4$ i $n=20$. Prema tome test od 0,05-nivoa-značajnosti

$$H_0: \mu=10 \quad \text{protiv} \quad H_1: \mu \neq 10$$

će odbaciti H_0 ako

$$\frac{\sqrt{20}}{4}|\overline{X}-10| \geq z_{0,025}$$

ili, ekvivalentno, ako

$$|\overline{X}-10| \geq \frac{4z_{0,025}}{\sqrt{20}}$$

Kako je $\frac{4z_{0,025}}{\sqrt{20}} = \frac{4 \cdot 1,96}{\sqrt{20}} = 1,753$

ovo znači da će H_0 biti odbačeno ako je udaljenost između $\overline{X}$ i 10 najmanje 1,753. To jest, H_0 će biti odbačeno ako

$$\overline{X} \geq 10+1,753 \quad \text{ili} \quad \overline{X} \leq 10-1,753.$$

To jest, ako

$$\overline{X} \geq 11,753 \quad \text{ili} \quad \overline{X} \leq 8,247$$

tada će H_0 biti odbačeno.

Sada, ako je sredina populacije 9,2, tada $\overline{X}$ će biti normalno sa sredinom 9,2 i standardnom devijacijom $\frac{4}{\sqrt{20}} = 0,894$; i sa standardizovanom varijablom

$$Z = \frac{\overline{X} - 9,2}{0,894}$$

koja će biti standardna normalna slučajna varijabla. Time, kada je tačna vrijednost signala 9,2, vidimo da

$$P\{\text{odbacivanje } H_0\} = P\{\overline{X} \geq 11,753\} + P\{\overline{X} \leq 8,247\}$$

$$= P\left\{\frac{\overline{X} - 9,2}{0,894} \geq \frac{11,753 - 9,2}{0,894}\right\} + P\left\{\frac{\overline{X} - 9,2}{0,894} \leq \frac{8,247 - 9,2}{0,894}\right\}$$

$$= P\{Z \geq 2,856\} + P\{Z \leq -1,066\} =$$

$$= 0,0021 + 0,1432$$

$$= 0,1453$$

Time, kada je vrijednost signala 9,2, postoji 85,47 postotaka šanse da test sa 0,05 nivoom značajnosti neće odbaciti nultu hipotezu da je vrijednost signala jednaka 10.